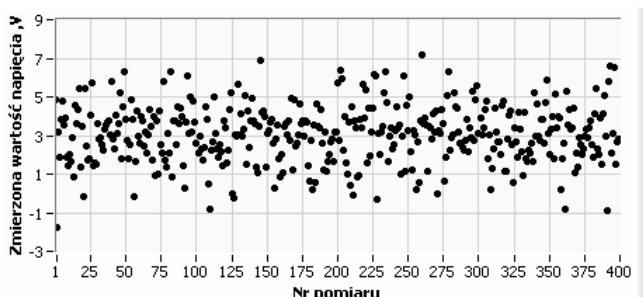


Wprowadzenie do obliczania niepewności metodą A

Problem:

Rozproszenie wyników pomiarów wykonanych w pozornie tych samych warunkach.



W praktyce założenie o niezmienności warunków fizycznych pomiaru, obiektu pomiaru, narzędzi pomiarowych nie jest spełnione.

Zjawisk, które powodują rozproszenie wyników pomiarowych nie można opisać zależnością „przyczyna → skutek”.

Do opracowania wyników serii pomiarów, które zostały wykonane w tych samych warunkach korzystamy z metod rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

Zmienna losowa

zmienna, która przyjmuje wartości
z określonym prawdopodobieństwem



dyskretna



ciągła

Rozkład zmiennej losowej X

prawdopodobieństwo przyjmowania przez zmienną losową X wartości x

Parametry charakteryzujące rozkład zmiennej losowej X:

- Dystrybuanta
- Funkcja gęstości prawdopodobieństwa
- Momenty centralne

Dystrybuanta F(x)

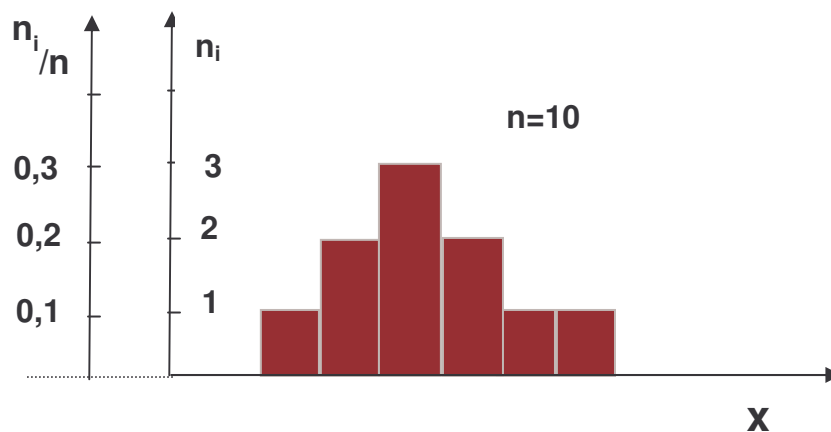
$$F(x) = P(X \leq x)$$

Na podstawie dystrybuanty można wyznaczyć **prawdopodobieństwo**, że $a < X \leq b$, gdzie $a < b$; a, b - dowolne liczby rzeczywiste

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

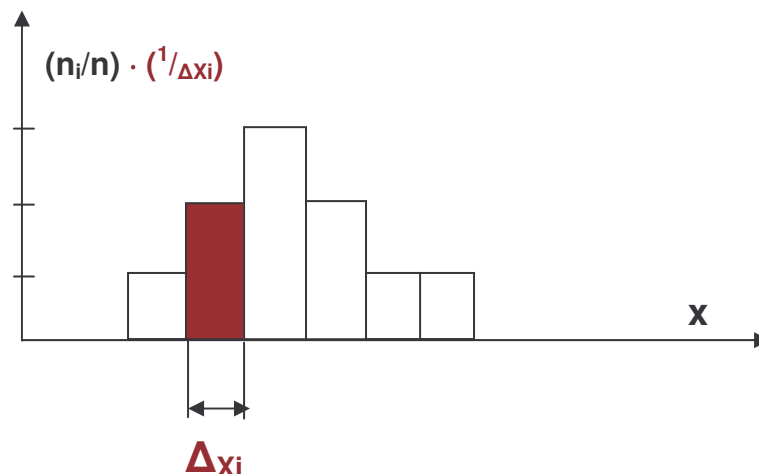
Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$

- Mierzmy n – krotnie wartość pewnej wielkości
- Uzyskujemy różne wyniki, które porządkujemy w ciąg liczb o charakterze rosnącym, tj. $x_{min} \dots x_{max}$
- Jeżeli niektóre z wyników występują wielokrotnie, to określamy częstość ich wystąpienia częstość względna (tj. $\frac{n_i}{n}$) – informuje, jaka część spośród n pomiarów dała wynik x_i ,
- Uzyskane wyniki można przedstawić w postaci wykresu słupkowego



- Uzyskane wyniki można zgrupować w k rozłącznych przedziałach (tzw. **klasach**) o długości Δx_i , gdzie $i=1, \dots, k$
 n_i – oznacza liczbę wyników, które trafiły do i -tego przedziału

Histogram - graficzne przedstawienie rozkładu wyników pomiarów (częstość występowania pomiarów w klasach)

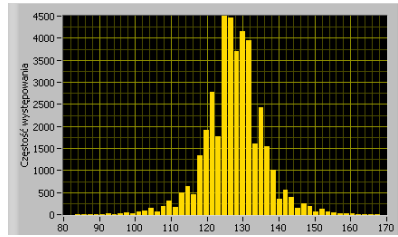
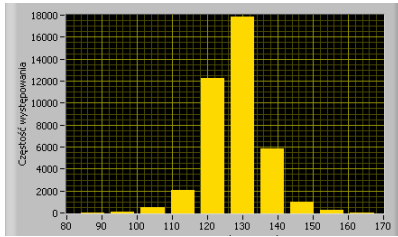


Pole prostokąta jest równe częstości względnej (n_i/n)

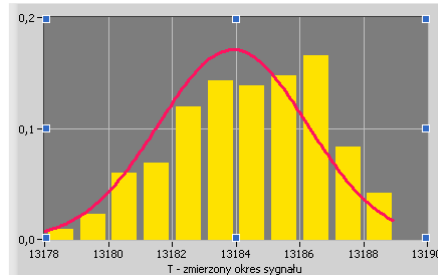
Problem: Jak dobrać szerokość przedziału $\Delta x_i = ?$

Jeżeli liczba pomiarów jest mała, to przedziały Δx_i powinny być relatywnie „szerokie”.

W miarę wzrostu liczby pomiarów należy zmniejszać Δx_i .



Gdy $n \rightarrow \infty$, to $\Delta x_i \rightarrow 0$, a **histogram** upodabnia się do gładkiej krzywej ciągłej, która jest wykresem funkcji opisującej rozkład zmiennej losowej ciągłej, tj. funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$



Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Pomiędzy funkcją gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ i dystrybuantą $F(x)$ zachodzą następujące zależności: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$; $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Momenty centralne

- **Wartość oczekiwana** zmiennej losowej X

$$\begin{aligned} E(X) = \mu &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana jest miarą skupienia rozkładu

- **Wariancja** zmiennej losowej X

$$\begin{aligned} D^2(X) = \sigma^2 &= E[X - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - \mu]^2 p_i \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mu]^2 \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

Wariancja jest miarą rozproszenia rozkładu wokół wartości oczekiwanej
Odchylenie standardowe (sigma σ)

$$\sigma = +\sqrt{D^2(X)}$$

Rozkład normalny – rozkład Gaussa

Do rozkładu normalnego prowadzi taki proces kształtowania zjawiska, w ramach którego na dane zjawisko oddziałowują duża liczba niezależnych czynników, których wpływ, traktowany odrębnie, jest mało znaczący.

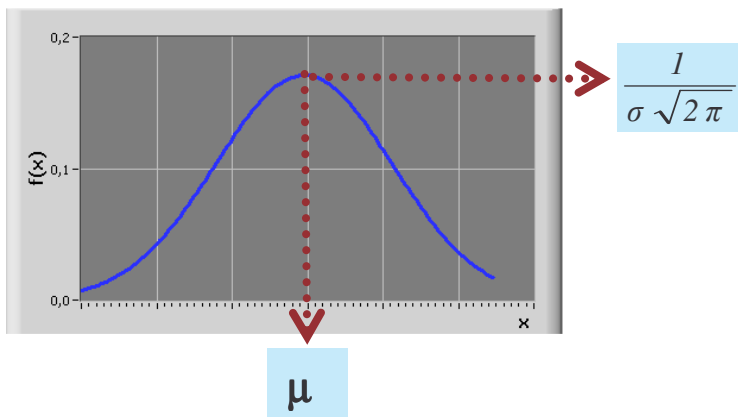
Zmienna losowa X ma rozkład normalny o parametrach μ i σ , co w skrócie zapisujemy jako $X: N(\mu, \sigma)$ jeśli jej funkcja gęstości prawdopodobieństwa wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

gdzie $-\infty < x < \infty$, $\sigma > 0$

W rozkładzie normalnym

- wartość oczekiwana: $E(x) = \mu$
- wariancja: $D^2(X) = \sigma^2$



Standardowy rozkład normalny $N(0,1)$

Często zmienną losową mającą taki rozkład oznacza się jako **Z** (lub **U**).

Wartości funkcji gęstości $\phi(z)$ – funkcji Gaussa i wartości dystrybucyjnej $\Phi(z)$ – funkcji Laplace’a są stabelaryzowane.

Problem: Jak określić prawdopodobieństwo $P(x_1 < X \leq x_2) = ?$
gdy $X: N(\mu, \sigma)$

Prawdopodobieństwo, że wynik pomiaru wystąpi w przedziale (x_1, x_2) wynosi:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$f(x)$ - analitycznie niecałkowalna dla rozkładu normalnego

Operacja standaryzacji:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}, \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

Po tej operacji zmienna losowa Z staje się zmienną standaryzowaną i ma rozkład $N(0,1)$

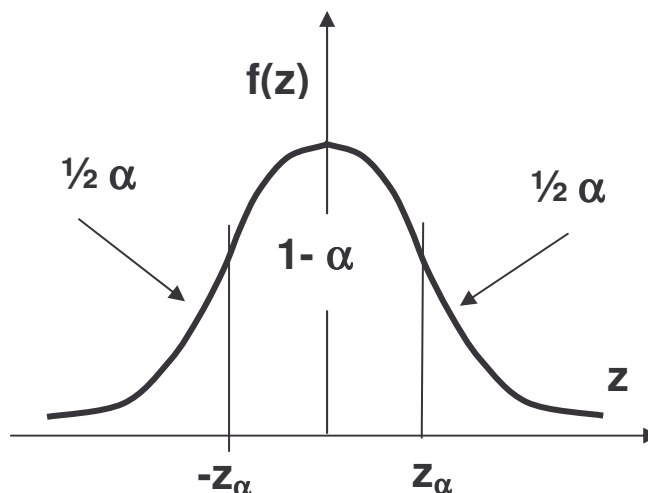
$$P(x_1 < X \leq x_2) = \dots = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

$$P(|Z| > z_\alpha) = \alpha$$

$$P(|Z| < z_\alpha) = 1 - \alpha = \gamma$$

α - poziom istotności

$1 - \alpha$ - poziom ufności



Prawdopodobieństwo występowania zmiennej losowej X w przedziale:

- a) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,68$
- b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,95$
- c) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,9973$

Przedział $(\mu - k \cdot \sigma, \mu + k \cdot \sigma)$ to tzw. przedział ufności

Prawdopodobieństwo odpowiadające temu przedziałowi to poziom ufności

Centralne twierdzenie graniczne

Suma dużej liczby zmiennych losowych niezależnych o dowolnych rozkładach ma rozkład normalny.

Jeżeli rozpatrywana wielkość jest wynikiem działania wielu czynników od siebie niezależnych, a zmieniających się chaotycznie, to zmienna losowa o rozkładzie normalnym jest wiarygodnym modelem tej wielkości.

Średnia arytmetyczna serii losowo wybranych wartości zmiennej X o rozkładzie normalnym $N(\mu_x, \sigma_x)$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym:

$$\bar{X} : N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)$$

gdzie n – liczba pomiarów.

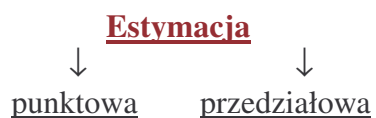
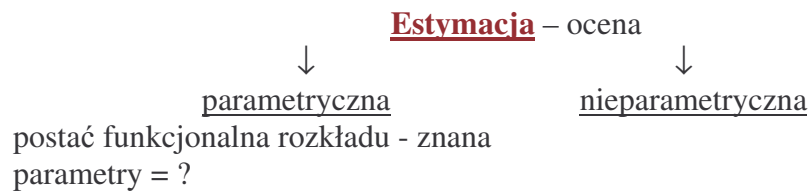
Populacja generalna

Zbiór wszystkich możliwych do uzyskania w danym pomiarze wartości x zmiennej losowej X

Próba

Zbiór wszystkich uzyskanych w danym pomiarze wartości x zmiennej losowej X

Próba musi być reprezentatywna i dostatecznie liczna



Opracowanie wyników serii pomiarów – obliczanie niepewności metodą A
(założenie błędy systematyczne metody zostały wyeliminowane za pomocą poprawek)

Seria pomiarów: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
Założenie: Rozkład normalny
Wartość oczekiwana $\mu_x = ?$
Odchylenie standardowe $\sigma_x = ?$

μ_x, σ_x należy oszacować na podstawie n pomiarów (gdy liczba pomiarów $n \ll \infty$)

Estymator wartości oczekiwanej

$$\mu_x \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

wartość średnia serii pomiarów jest optymalnym estymatorem wartości oczekiwanej

Estymator odchylenia standardowego - odchylenie standardowe eksperymentalne

$$\sigma_x \approx s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n-1}}$$
$$\Delta_i = x_i - \bar{x}$$

Estymator odchylenia standardowego dla średniej odchylenie standardowe eksperymentalne średniej

$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Wynik końcowy pomiaru można zapisać w postaci : $\bar{x} \pm \Delta_{\bar{x}} = \bar{x} \pm 3 \cdot \sigma_{\bar{x}}$

- 1) gdy liczba pomiarów $n > 20$ to stosujemy rozkład Gaussa
dla przedziału 3-sigma, $P=0,9973$

$$\Delta_{\bar{x}} = \pm 3 \cdot \sigma_{\bar{x}} \approx \pm 3 \cdot s_{\bar{x}}$$

- 2) gdy liczba pomiarów $n < 20$ to stosujemy rozkład t - Studenta
zmienna losowa $t=f(P,n)$
 P - prawdopodobieństwo, n - liczba pomiarów

Odchylenie standardowe w tym rozkładzie jest większe niż σ w rozkładzie Gaussa –
w ten sposób uwzględnia się małą liczbę pomiarów.

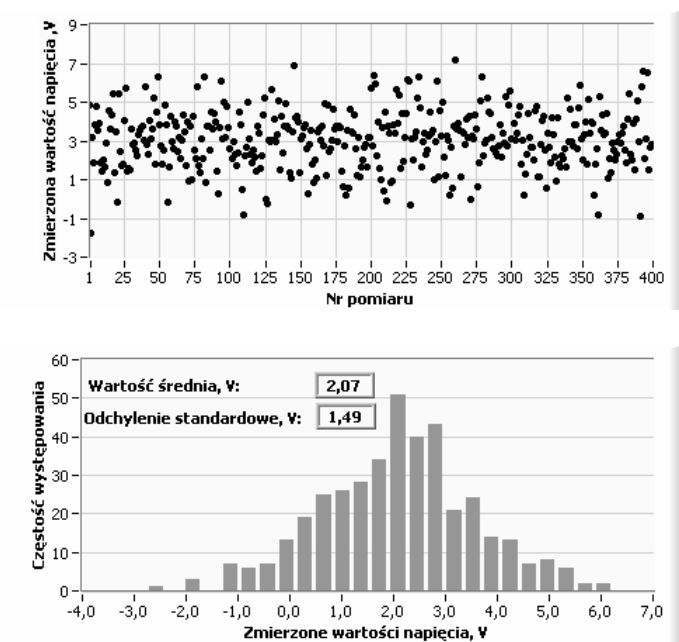
Gdy $n > 30$ rozkład Studenta przechodzi w rozkład Gaussa

$$\Delta_{\bar{x}} \approx \pm t_{n,P} \cdot s_{\bar{x}}$$

$t_{n,P}$ – liczba z tablic funkcji t-Studenta

Przykład:

Pomiar wartości napięcia stałego w obecności zakłóceń losowych o rozkładzie normalnym



Wynik i -tego pomiaru jest niewiarygodny i należy go odrzucić, gdy

$$|\Delta_i| > 3 \cdot \sigma_x$$

gdzie $\Delta_i = x_i - \bar{x}$

1) gdy liczba pomiarów $n > 20$

$$|\Delta_i| > 3 \cdot s_x$$

2) gdy liczba pomiarów $n < 20$

$$|\Delta_i| > t_{n,P} \cdot s_x$$

Niepewność pomiaru

Niepewność pomiaru u to parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.

Takim parametrem może być odchylenie standardowe lub jego wielokrotność.

Niepewność typu A - niepewność spowodowana efektami przypadkowymi, wyznacza się metodami statystycznymi, $u_A(x)$

Niepewność typu B - niepewność spowodowana efektami systematycznymi, wyznacza się innymi metodami niż metody statystyczne, $u_B(x)$

Podstawowe definicje

- Niepewność standardowa** – niepewność wyniku wyrażona w formie odchylenia standardowego

$$u(x) = \sigma$$

- Złożona niepewność standardowa**

- gdy wynik pomiaru zależy od innych wielkości bezpośrednio mierzonych, które nie są ze sobą skorelowane

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

- gdy występują równocześnie niepewności typu A i typu B

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

- Niepewność rozszerzona** – określa przedział wokół wyniku pomiaru, który wg oczekiwań pokrywa dużą część rozkładu wartości przypisywanych wielkości mierzonej

$$U_p = k_p \cdot u_c(y)$$

$$\text{albo } U_p = k_p \cdot u_c$$

Współczynnik rozszerzenia k_p - zależy od rozkładu prawdopodobieństwa oraz od poziomu ufności p

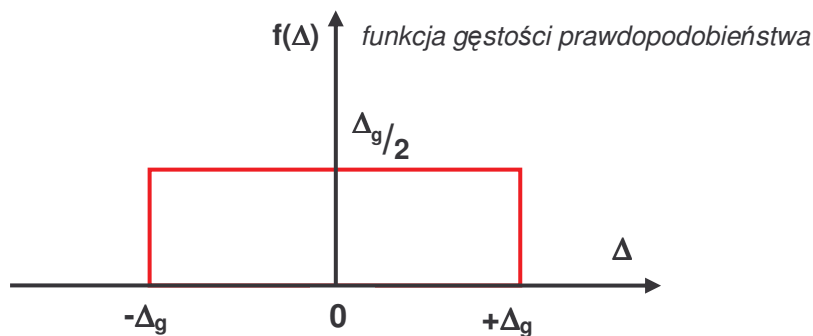
Ocena niepewności metodą typu B

bazuje m.in. na:

- właściwościach przyrządów i metod pomiarowych,
- informacjach podanych przez producenta
- danych uzyskanych w czasie kalibracji.

Błąd aparatury pomiarowej (tj. maksymalny błąd dopuszczalny Δ_{dop} zwany też błędem granicznym Δ_g) to typowe źródło niepewności wywołanej przez efekty systematyczne.

Błąd ten można modelować zmienną losową o **rozkładzie jednostajnym** (tzn. błędy mogą przyjąć każdą wartość z przedziału $\pm \Delta_g$ z jednakowym prawdopodobieństwem).



Wartość oczekiwana $E(\Delta) = 0$

Wariancja $D^2(\Delta) = \frac{\Delta_g^2}{3}$

Odchylenie standardowe $\sigma = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}}$

Niepewność standardowa $u_B = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}}$

Zadanie 4:

Amperomierzem analogowym o klasie dokładności $kl=0,5$ zmierzono natężenie prądu stałego na zakresie pomiarowym $I_n=30$ mA. Obliczyć niepewność pomiaru.

Rozwiązanie:

Maksymalny błąd dopuszczalny amperomierza (błąd graniczny) wynosi:

$$\Delta_g = \Delta_{dop} = \pm \frac{kl}{100} \cdot I_n = \pm \frac{0,5}{100} \cdot 30 = \pm 0,15 \text{ mA}$$

Niepewność standardowa typu B jest równa: $u_B = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}} = 0,087 \text{ mA}$

W pomiarach pośrednich istotnym problem jest ocena współczynnika k_p .

Przykład 1: Podczas pośredniego pomiaru rezystancji wg $R = \frac{U}{I}$ mamy splot dwóch rozkładów jednostajnych, czego wynikiem może być rozkład trójkątny lub trapezowy.

Przykład 2: Gdy w pomiarze bezpośrednim występują oddziaływania losowe o rozkładzie normalnym oraz błąd aparaturowy, który można modelować rozkładem jednostajnym, to

złożona niepewność standardowa wynosi $u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$

Niepewność rozszerzona $U_p = k_p \cdot u_c$

Problem: $k_p = ? \rightarrow$ założony poziom ufności

$\rightarrow \sigma_A/\sigma_B$
(splot rozkładu jednostajnego i normalnego)